# Minimal Fullharmonic構造とMinimal Resolventについて (マルコフ過程論)



郡, 敏昭

数理解析研究所講究録
112巻 1971年 50-54



# Minimal Fullharmonic 構造と Minimal resolvent について

静大 理　　郡 敏昭

先に筆者は Axiomatic theory of non-negative full-superharmonic functions ( to appear ) において Full調和構造と submarkov resolvent の関係を論じた。すなわち 調和空間 ( X, $\mathcal{H}$ ) 上の full調和構造 $\widetilde{\mathcal{H}}$ が与えられたとき, $E^n = C(X) \cap \widetilde{\mathcal{H}}(X - K_n)$, ここに ( $K_n$ ) はコンパクト集合による X の exhaustion, とおくと $E^n$ は $C_b(X)$ のバナハ部分空間で $E = \bigcup_n E^n$ と 次の resolvent の値域 $V_\lambda(B_b(X))$ は同じ uniform closure をもつ事を示した。ここに $V_\lambda$ は 非負な full-superharmonic 函数全体 $\widetilde{\mathcal{S}}_+(X)$ を エクセシブ函数の全体として持つ submarkov resolvent である。

$$V_\lambda : \quad B_b(X) \longrightarrow C_b(X) \quad 。$$

そこでこのような full 調和構造の中で最小なものを見つけること, それに対応する resolvent が Meyer により構成された resolvent ; そのエクセシブ函数全体 $= \mathcal{S}_+(X)$

，と一致するかどうかをしらべること が問題となる。

$(X, \mathcal{H})$ を Brelot の harmonic space，

$1 \in \mathcal{S}(X)$，

$\exists p > 0$，potential on $X$．

とする。$X_0$ を一点コンパクト化 $X_0 = X \cup \{\Delta\}$ とし 集合 $A \subset X_0$ の $A \cap X$ の $X$ での境界を $\partial A$，$X_0$ での境界を $\delta A$ と書く。$\partial D$ がコンパクトな，相対コンパクトならざる領域（$X$ での）の全体を $\mathcal{D} \ni D$ と書く。$K$ を $X$ のコンパクト集合とし，$\partial K$ 上の函数 $f$ に対し，$f' = f$ on $\partial K$，$= 0$ on $\Delta$ として $\delta(X-K)$ 上の函数 $f'$ を def. する。

$$\mathcal{V}(f) = \{ s \in \mathcal{S}(X-K) ;\ \liminf_{X-K \ni y \to x} s(y) \geq f'(x) > -\infty,\ \forall x \in \delta(X-K) \}$$

$$\overline{H}^{X-K} f = \inf \mathcal{V}(f)$$

とおく。$\overline{H}^{X-K} f$ は $X-K$ 上で調和的である。

Loeb により得られた結果

$G \subset X$ 開領域，$x_0 \in \delta G$ とする。$G$ に対する点 $x_0$ での barrier とは $x_0$ の開近傍と $G$ の共通部分で定義された調和函数 $B \geq 0$ で $\lim_{G \ni x \to x_0} B = 0$ となるものを言う。

コンパクト集合 $K \neq \phi$ は 各 $x \in \partial K$ に対し $x$ での $X-K$ に対する barrier が存在するとき 外から正則的 と

言う。すべてのコンパクト集合は外から正則的なるコンパクト集合に含まれていることがわかる(Loeb)。Kを外から正則的, $f \in C(\partial K)$ なら

$$\lim_{X-K \ni y \to x} \overline{H}^{X-K} f(y) = f(x), \quad \forall x \in \partial K \ 。$$

Minimalなfull調和構造を導入しよう。

$D \in \mathcal{D}$ に対し

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0(D) = \left\{ h \in \mathcal{H}(D) ;\ \exists \text{外から正則的コンパクト } K \quad X-K \subset D, \quad h = \overline{H}^{X-K}[h|_{\partial K}] \right\}.$$

この $\widetilde{\mathcal{H}} = \{\widetilde{\mathcal{H}}(D), D \in \mathcal{D}\}$ が

(*) $D, D' \in \mathcal{D}, D' \subset D \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(D) \Rightarrow u|_{D'} \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(D')$

(**) $u \in \mathcal{H}(D), \exists K$ compact $\partial D \subset \mathring{K}$,

$u|_{D-K} \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(D-K) \quad \Rightarrow \quad u \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(D)$

をみたすことはすぐわかる。また上述より

(***) すべてのコンパクト集合に対しそれを含むコンパクトで$\widetilde{\mathcal{H}}_0$-regularな補集合をもつようなものが存在することもわかる。ここに $D \in \mathcal{D}$ は $C(\partial D)$ の任意の函数$f$が $\widetilde{\mathcal{H}}_0(D)$に属ちような連続拡張をもちそれを$\widetilde{H}_0^D f$とするなら $f \geq 0 \Rightarrow \widetilde{H}_0^D f \geq 0$ がしたがうようなとき、そのとき$\widetilde{\mathcal{H}}_0$-regularと言う。

以上より $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ はfull調和構造である。

Lemma　$D \in \mathcal{D}$，Aを外からregularなコンパクトで $\overline{X-A} \subset D$。　$s \in \mathcal{S}_+(D)$ は

$$s \geq H^{X-A} s = \widetilde{H}_0^{X-A} s \quad \text{on } X-A$$

をみたす。（証．$\vartheta(s|_{\partial A})$ の定義より）

B. Walsh により一つのfullharmonic構造 $\widetilde{\mathcal{H}}$ が与えられたとき（上記(*)～(***)で $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ を $\widetilde{\mathcal{H}}$ と書きなおした条件をもつ構造が与えられたとき）外からregularなコンパクト集合はすべてその補集合を $\widetilde{\mathcal{H}}$-regularにする事が示された。そこで次の定義を与える。

定義：二つのfullharmonic構造 $\widetilde{\mathcal{H}}$, $\widetilde{\mathcal{H}}'$ に対し

$\widetilde{\mathcal{H}} \succ \widetilde{\mathcal{H}}' \Leftrightarrow \forall A$ 外からregularなコンパクト

$\forall f \in C_+(\partial A)$ に対し

$$\widetilde{H}^{X-A} f \geq \widetilde{H}'^{X-A} f \quad \text{on } X-A。$$

（ここにおいて $\widetilde{H}^D f$ 等は先の $\widetilde{H}_0^D f$ と同じ的。）

この定義と上のLemmaよりただちに $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ がMinimalであることがしたがう。

$1 \in \mathcal{S}_+(X)$ と positive potential の存在を仮定しているので minimal fullharmonic構造 $\widetilde{\mathcal{H}}_0$ には筆者の先の論文の結果をすべて適用できるようになっている。とくに

$\tilde{\mathcal{H}}_0(X) = \{0\}$, $\tilde{\mathcal{S}}(X) = \tilde{\mathcal{S}}_+(X) = \mathcal{S}_+(X)$ , ここに $\tilde{\mathcal{S}}(X)$ は $X$ 上の full superharm. 函数全体, がわかる. したがって ∃ submarkov resolvent $(V^0_\lambda)$ ,

$$\mathcal{S}_+(X) = (V^0_\lambda)\text{-excessive fn.s 全体}$$

がわかる。

この結果系として $V^0_\lambda$ は Meyer により構成された resolvent と正に一致しているから その resolvent の値域が特性づけられた。すなわち $E^0_n = C(X)\cap\tilde{\mathcal{H}}_0(X-K_n)$ , $E^0 = \bigcup_n E^0_n$ とおくと

$$\overline{V^0_\lambda(B_b(X))} = \overline{E^0}$$

がわかった。

$E^0 \supset C_c(X)$ だから当然 $\lambda V^0_\lambda f(x) \to f(x)$ が $\forall f \in C_c(X)$ に対し $X$ 上で一様に成り立つ。Meyer が得た $V^0_\lambda$ の regularity がこれである。


P. Loeb. Ann. Inst. Fourier 16 (1966)

B. Walsh. Inventiones math. 8 (1969)

P. A. Meyer. Ann. Inst. Fourier 13 (1963)